Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

1

Convexidad, teorema de representación y Farkas

Definición 1.1. *Un subconjunto C en $\mathbb{R}^n$ es convexo si para cualquier par de puntos $x, y \in C$ y para cualquier $0 \leq \lambda \leq 1$ la combinación convexa satisface $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.*

Definición 1.2. *Un hiperplano es un subconjunto H en $\mathbb{R}^n$ definido como $\{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = \delta\}$ para alguna $\delta \in \mathbb{R}$.*

Un hiperplano H en el espacio $\mathbb{R}^n$ lo divide en dos subconuntos $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \geq \delta\}$ y $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \leq \delta\}$, llamados semiespacios.

Ejemplo: La envolvente convexa de un conjunto finito $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ de puntos en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.3. *La intersección finita $\cap H_{j=1}^{m+,-}$ de semiespacios, se denomina poliedro y generalmente se denota por P.*

Una forma de caracterizar un poliedro P de $\mathbb{R}^n$ es a través de un sistema de desigualdades lineales que representan la intersección de semiespacios cerrados. Por lo tanto P es un poliedro si y solo si existe una matriz A de orden $m \times n$ y un vector $b \in \mathbb{R}^m$ tal que $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$

Definición 1.4. *La envolvente convexa de un subconjunto X en $\mathbb{R}^n$ es el conjunto convexo más pequeño que lo contiene $CH(X) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \Sigma_{i=1}^t \lambda_i x_i, x_i \in X\}$ para alguna $t \in \mathbb{N}$ y donde $\Sigma_{i=1}^t \lambda_i = 1$.*

Un concepto relevante en el contexto de conjuntos convexos corresponde al llamado *vértice*. Dado un conjunto convexo P, un punto $x \in P$ es un vértice si no existen dos puntos $x_1, x_2 \in P$ tal que $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, es decir, x no se puede escribir como combinación convexa de ningún par de puntos en P.

Para el caso particular de un poliedro, geométricamente los vértices corresponden no solamente a la intersección de semiespacios, sino a una intersección de hiperplanos. Entonces, cada vértice es la solución de un sistema de ecuaciones lineales, cuya solución es única. Esta idea se formula en el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ un poliedro, y sea $z \in P$, entonces z es un vértice si y sólo si $R(A_z) = n$. En donde A_z denota la submatriz de A cuyos renglones a_i satisfacen las ecuaciones de los hiperplanos $a_i z = b_i$.*

Se dice que un poliedro P es acotado si el vector $\mathbf{x}$ asociado a cada punto $x \in P$ satisface que $\|\mathbf{x}\| < k$ para alguna k.

En particular, se puede demostrar que:

Teorema 1.2. *Dado un poliedro acotado $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ cuyos vértices son $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Entonces, $P = CH(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.*

Un caso de especial importancia, en el contexto de la programación lineal, corresponde al concepto de cono convexo.

Definición 1.5. *Un subconjunto C de $\mathbb{R}^n$ es un cono convexo si para cualquier $x, y \in C$ y para cualesquier $\lambda, \mu \geq 0$ la combinación no negativa de x e y satisface $\lambda x + \mu y \in C$.*

Para cualquier conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ el cono más pequeño que contiene a X se define como el conjunto $cono(X) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \Sigma_{i=1}^{t} \lambda_i x_i, x_i \in X, \lambda_i \geq 0\}$.

Es claro que un cono en el plano corresponde a las combinaciones lineales no negativas de dos vectores no paralelos x_1 y x_2 que se encuentran sobre las semirectas que pasan por el origen generadas por éstos, en general corresponde al primer cuadrante de un sistema de coordenadas de vectores no ortonormales. Desde el punto de vista geométrico parecería un triángulo infinito.